



Repetitorium Analysis II

Tag 1: Topologische, metrische und Banachräume

AUFGABE 1. (Metriken)

(a) Definiere den Begriff eines *metrischen Raumes*.

(b) Sei $d_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$. Bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, so dass

$$d_2: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_2(x, y) = (a - 1)(a - 2026) \cdot d_1(x, y)$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist.

(c) Sei $X = [1, \infty)$ und definiere

$$d: X \times X \rightarrow [0, \infty), \quad d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$

Zeige, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.

(d) Betrachte die Abbildung

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad d(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|.$$

Zeige oder widerlege: Das Paar $(\mathbb{R}, d)$ ist ein metrischer Raum.

(e) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $a \in X$ fest. Zeige, dass die Abbildung

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto d(x, a)$$

gleichmäßig stetig ist. Wann ist diese Abbildung konstant?

AUFGABE 2. (Topologische Eigenschaften)

(a) Seien X und Y metrische Räume und $f, g: X \rightarrow Y$ stetige Funktionen. Zeige, dass die Menge

$$A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \subseteq X$$

abgeschlossen in X ist.

(b) Betrachte die Menge

$$B = (0, 1] \times ([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

(i) Bestimme die Mengen ∂B , $\overline{B}$, $\overline{B} \setminus B$ und B° .

- (ii) Entscheide begründet, welche der Mengen aus (i) kompakt sind.
- (c) Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Entscheide für die folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind. Gib jeweils eine kurze Begründung bzw. ein Gegenbeispiel.
 - (i) Wenn f stetig auf einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist, so nimmt $f|_K$ sein Maximum an.
 - (ii) Wenn f stetig auf einer abgeschlossenen Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist, so nimmt $f|_A$ sein Maximum an.
 - (iii) Wenn f stetig auf einer beschränkten Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist, so nimmt $f|_B$ sein Maximum an.
 - (iv) Es gibt eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, die offen ist.
 - (v) Ist f stetig und beschränkt, so nimmt f sein Minimum an.
 - (vi) Ist f stetig, so sind Urbilder kompakter Mengen kompakt.
 - (vii) Ist f stetig, so sind Bilder kompakter Mengen kompakt.
 - (viii) Es gibt eine stetige, surjektive Abbildung $g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$.
 - (ix) Es gibt eine stetige, surjektive Abbildung $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.
 - (x) Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge $K \subseteq X$ eines metrischen Raumes X ist kompakt.
 - (xi) Für jede stetige Funktion $g: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: Für jedes $x_2 \in \mathbb{R}$ nimmt die Funktion $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto g(t, x_2)$ ihr Maximum an.
 - (xii) Für jede stetige Funktion $g: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: Für jedes $x_1 \in [0, 1]$ nimmt die Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto g(x_1, t)$ ihr Maximum an.
 - (xiii) In einem metrischen Raum ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge.
 - (xiv) Jede abgeschlossene Teilmenge $M \subseteq X$ eines metrischen Raumes X ist vollständig.

AUFGABE 3. (Metriken und Konvergenz)

Auf $X = C([0, 1]^2; \mathbb{R})$ betrachten wir die zwei Abbildungen $d_{L^2}, d_\infty: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ definiert durch

$$d_{L^2}(f, g) = \left(\int_0^1 \int_0^1 |f(x_1, x_2) - g(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]^2} |f(x) - g(x)|.$$

Es darf ohne Beweis angenommen werden, dass d_{L^2} eine Metrik auf X ist.

- (a) Zeige, dass d_∞ eine Metrik auf X ist.
- (b) Wir betrachten die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X gegeben durch

$$f_k: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_k(x_1, x_2) = x_1^k x_2$$

sowie die Nullfunktion $f = 0 \in X$. Untersuche, ob $f_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ im metrischen Raum (X, d_{L^2}) bzw. (X, d_∞) .

Hinweis: Diese Aufgabe wird an Tag 3 fortgesetzt.

AUFGABE 4. (Induzierte Metrik)

- (a) Definiere den Begriff eines *normierten Vektorraumes*.
- (b) Sei E ein Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Zeige, dass die induzierte Abbildung

$$d: E \times E \rightarrow [0, \infty), \quad d(x, y) = \|x - y\|$$

eine Metrik auf E definiert.

- (c) Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die *Metrik der französischen Eisenbahn* auf $\mathbb{R}^n$, also

$$\overset{\text{f}}{d}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty), \quad \overset{\text{f}}{d}(x, y) = \begin{cases} \|x - y\|_2 & \text{wenn } x = \alpha y \text{ für ein } \alpha > 0, \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei ist $\|\cdot\|_2$ die klassische euklidische Metrik. Es darf ohne Beweis angenommen werden, dass $(\mathbb{R}^n, \overset{\text{f}}{d})$ ein metrischer Raum ist.

Gibt es eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$, die $\overset{\text{f}}{d}$ wie in (b) induziert?

AUFGABE 5. (Folgenkompaktheit)

Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, $K \subseteq X$ eine Teilmenge und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

- (a) Wann nennt man f in $x_0 \in X$ *stetig*?
- (b) Wann nennt man K *folgenkompakt*? Wann nennt man K *kompakt*?
- (c) Ist es möglich, dass K kompakt, aber nicht folgenkompakt ist? Gib ein Beispiel bzw. ein Argument, warum kein solches Beispiel existiert.
- (d) Beweise mit Hilfe der Definition von Folgenkompaktheit: Falls K folgenkompakt und f stetig ist, so ist $f(K) \subseteq Y$ folgenkompakt.
- (e) Zu welchem aus der Vorlesung bekannten Satz ist die Aussage in (d) äquivalent?

AUFGABE 6. (Operatornorm)

Seien $(A, \|\cdot\|_A), (B, \|\cdot\|_B)$ Banachräume und $f: A \rightarrow B$ eine lineare Abbildung.

- (a) Definiere die Operatornorm auf $L(A, B)$.
- (b) Sei f zusätzlich eine beschränkte Funktion. Zeige, dass f eine stetige Funktion ist.
- (c) Betrachte die Abbildung

$$\mathcal{I}: (C([-1, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|) \quad \text{mit} \quad \mathcal{I}(g) = \int_{-1}^1 g(x) \, dx.$$

Zeige, dass die Operatornorm von $\mathcal{I}$ gleich 2 ist.

- (d) Für welche $a \in \mathbb{R}$ existiert eine lineare Abbildung

$$\mathcal{J}_a: (C([-1, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

deren Operatornorm a ist? Gib gegebenenfalls jeweils ein Beispiel an.

AUFGABE 7. (Banachräume)

Auf dem Vektorraum $C^1([a, b]; \mathbb{R})$ der stetig differenzierbaren Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir die Abbildung

$$\|\cdot\|_{C^1}: C^1([a, b]; \mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty), \quad \|f\|_{C^1} = \sup_{x \in [a, b]} (|f(x)| + |f'(x)|).$$

(a) Zeige, dass $\|\cdot\|_{C^1}$ eine Norm auf $C^1([a, b]; \mathbb{R})$ definiert.

(b) Zeige, dass $(C^1([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^1})$ ein Banachraum ist.

Tipps: Nutze aus, dass $(C([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty})$ ein Banachraum ist. Außerdem darfst du die folgenden zwei Aussagen, die wir an Tag 3 zeigen werden, vorerst ohne Beweis verwenden:

Fakt 1. Sei X ein metrischer Raum und $D \subseteq X$. Seien für alle $n \in \mathbb{N}$ Funktionen $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben und sei außerdem $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

- (i) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f .
- (ii) Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_{\infty} = 0$.

Fakt 2. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die punktweise gegen eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Wir nehmen an, dass die Folge $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Ableitungen $f'_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert. Dann ist f differenzierbar mit

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

(c) Zeige: Die Abbildung

$$\mathcal{D}: (C^1([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^1}) \longrightarrow (C([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_{\infty}), \quad f \longmapsto f',$$

die jeder Funktion ihre Ableitung zuordnet, ist stetig.