



Repetitorium Analysis II

Tag 2: Differenzierbarkeit

AUFGABE 1. (Differenzierbarkeit I)

- (a) Seien $(A, \|\cdot\|_A)$, $(B, \|\cdot\|_B)$ Banachräume und $U \subseteq A$ offen. Definiere, wann eine Funktion $f: U \rightarrow B$ differenzierbar an der Stelle $x \in U$ ist.
- (b) Sei $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Gib jeweils eine kurze Begründung bzw. ein Gegenbeispiel.
- (i) Ist g stetig, so ist g partiell differenzierbar.
 - (ii) Ist g partiell differenzierbar, so ist g stetig.
 - (iii) Ist g partiell differenzierbar, so ist g differenzierbar.
 - (iv) Ist g differenzierbar, so ist g partiell differenzierbar.
 - (v) Ist g differenzierbar, so ist g stetig partiell differenzierbar.
 - (vi) Ist g stetig partiell differenzierbar, so ist g differenzierbar.
 - (vii) Ist g stetig, so ist g differenzierbar.
 - (viii) Ist g differenzierbar, so ist g stetig.
- (c) Wir betrachten die Funktion

$$h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Prüfe h auf Stetigkeit, partielle Differenzierbarkeit und Differenzierbarkeit. Gib an allen entsprechenden Stellen die (partiellen) Ableitungen an.

AUFGABE 2. (Jacobi-Matrizen und Kettenregel)

Wir betrachten die Funktionen

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3, & f(t) &= (1+t, t^2, 1-t), \\ g: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}, & g(x, y, z) &= 1+x+xyz, \\ h: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^3, & h(x, y) &= (\sin(xy), x+\sin(y), x) \end{aligned}$$

sowie die Verknüpfungen $k = g \circ f$ und $\ell = g \circ h$.

- (a) Welche Dimensionen haben die Jacobi-Matrizen von f, g, h, k und ℓ ?
- (b) Begründe, warum f, g und h differenzierbar sind. Bestimme $Df(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$, $Dg(x, y, z)$ für alle $(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3$ und $Dh(x, y)$ für alle $(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2$.

- (c) Begründe, warum k und ℓ differenzierbar sind und berechne mit der Kettenregel $Dk(0)$ und $D\ell(0, 0)$.

AUFGABE 3. (Differenzierbarkeit II)

Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} 10x - 2y + \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Untersuche, ob f in $(0, 0)^\top$

- (a) stetig,
- (b) partiell differenzierbar,
- (c) differenzierbar ist.

Tipp: Nutze Polarkoordinaten.

AUFGABE 4. (Differenzierbarkeit III – Normfunktion)

Sei $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} x_1 x_2 x_3 \| (x_1, x_2, x_3) \|_2^{-3} & \text{falls } (x_1, x_2, x_3) \neq (0, 0, 0), \\ 0 & \text{falls } (x_1, x_2, x_3) = (0, 0, 0). \end{cases}$$

- (a) Zeige, dass die Funktion f im Punkt $(0, 0, 0)^\top$ nicht stetig ist.
- (b) Untersuche, ob die partiellen Ableitungen von f in einem Punkt $(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ existieren. Berechne ggf. die partielle Ableitung von f nach x_1 .
- (c) Untersuche an welchen Punkten $(x_1, x_2, x_3)^\top \in \mathbb{R}^3$ die Funktion f differenzierbar ist. Berechne ggf. die Ableitung von f in diesen Punkten.

AUFGABE 5. (Differenzierbarkeit IV – Wilde Normfunktion)

Sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Untersuche die Funktion

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\|x-x_0\|_2-1}} & \text{falls } \|x-x_0\|_2 < 1, \\ 0 & \text{falls } \|x-x_0\|_2 \geq 1. \end{cases}$$

auf Stetigkeit, partielle Differenzierbarkeit und Differenzierbarkeit. Gib an allen entsprechenden Stellen die (partiellen) Ableitungen an.

Tipp: Es könnte nützlich sein, die Funktion

$$g: \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(r) = \begin{cases} e^{\frac{1}{r-1}} & \text{falls } r < 1, \\ 0 & \text{falls } r \geq 1. \end{cases}$$

zu betrachten.

AUFGABE 6. (Niveauflächen)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei weiter $x_0 \in U$ und definiere $c = f(x_0)$. Zeige, dass der Gradient $\nabla f(x_0)$ senkrecht auf der Niveaufläche

$$N_f(c) = \{x \in U \mid f(x) = c\}$$

steht, d.h. folgendes gilt: Ist $\varepsilon > 0$ und $\varphi: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ irgendeine stetig differenzierbare Kurve mit $\varphi(0) = x_0$ und $\varphi((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq N_f(c)$, dann gilt

$$\langle \varphi'(0), \nabla f(x_0) \rangle = 0.$$

(Hierbei ist $\langle -, - \rangle$ das klassische euklidische Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$.)

Tipp: Betrachte die Funktion $g = f \circ \varphi$ und wende die Kettenregel an.

AUFGABE 7. (Gradientenfeld?)

Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = \begin{pmatrix} xyz \\ 2xy^2 - 3 \\ z + 2x^2y \end{pmatrix}.$$

Ist f ein Gradientenfeld? (D.h. existiert eine differenzierbare Funktion $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\nabla F(x, y, z) = f(x, y, z)$ für alle $(x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^3$?)

AUFGABE 8. (Umkehrsatz)

Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x, y) = (e^{\sin(x)} - \cos(x), \cos(x + 2y)).$$

- (a) Zeige, dass f nicht injektiv (also insbesondere nicht bijektiv) auf $\mathbb{R}^2$ ist.
- (b) Formuliere den Umkehrsatz.
- (c) Wir betrachten den Punkt $a = (\frac{\pi}{2}, 0) \in \mathbb{R}^2$. Zeige, dass es eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von a und eine offene Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^2$ von $f(a)$ gibt, so dass f die Menge U bijektiv auf V abbildet und die Umkehrabbildung

$$g = f^{-1}: V \rightarrow U$$

stetig differenzierbar ist.

Anleitung: Es müssen einfach die Voraussetzungen des Umkehrsatzes geprüft werden. Das macht ihr in folgenden Schritten.

- (1) Berechne für die (differenzierbaren) Koordinatenfunktionen von f alle partiellen Ableitungen.
- (2) Prüfe anhand Schritt (1), ob f stetig differenzierbar ist und bestimme die Ableitung $Df(x, y)$ in $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ als Funktionalmatrix. Ihr bekommt hier eine 2×2 -Matrix.
- (3) Prüfe, ob $Df(a): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein Isomorphismus ist. (Tipp: Determinante.)

Mehr ist es nicht!

Hinweis: Macht euch klar, warum die Aussage des Umkehrsatzes in dieser Aufgabe genau der Aussage in der Vorlesung bzw. im Skript entspricht.

- (d) Bestimme die Ableitung von g im Punkt $f(a) = (e, 0) \in V$ als Funktionalmatrix. Berechne damit den Wert $Dg(e, 0)(2, -4)$.
- (e) Finde einen Punkt $a' \in \mathbb{R}^2$, so dass $Df(a'): \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ **kein** Isomorphismus ist. Was sagt der Umkehrsatz für diese Situation?

AUFGABE 9. (Satz über implizite Funktionen)

Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = (1 + y) \cos(x) + e^z \sin(y) + xz.$$

- (a) Formuliere den Satz über implizite Funktionen.
- (b) Zeige, dass die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ in einer Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ und $V \subseteq \mathbb{R}$ von $z_0 = 0$ eindeutig nach z auflösbar ist; d.h. es gibt eine eindeutige differenzierbare Funktion $g: U \rightarrow V$ mit $g(\frac{\pi}{2}, 0) = 0$, so dass $f(x, y, g(x, y)) = 0$ für alle $(x, y) \in U$.

Tipp: Man muss hier ähnlich vorgehen wie für die Anwendung des Umkehrsatzes.

- (c) Bestimme $Dg(\frac{\pi}{2}, 0)$.

AUFGABE 10. (Taylorpolynom)

Wir betrachten die Funktion

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = (y + \cos(y)) \sin(x).$$

Bestimme das Taylorpolynom 2. Grades von f im Punkt $(\frac{\pi}{2}, 0)^\top$.