



Repetitorium Analysis II

Tag 3: Extrema und Funktionenfolgen

AUFGABE 1. (Klassische Extrema)

- (a) Sei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und sei $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mit $Df(x_0) = 0$. Sei weiter die Hesse-Matrix von f in x_0 gegeben durch

$$H_f(x_0) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Zeige die folgenden Aussagen:

- (i) Falls $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$, so liegt bei x_0 ein lokales Minimum vor.
 - (ii) Falls $a < 0$ und $ac - b^2 > 0$, so liegt bei x_0 ein lokales Maximum vor.
 - (iii) Falls $ac - b^2 < 0$, so liegt bei x_0 ein Sattelpunkt vor.
- (b) Bestimme Lage und Art aller kritischen Punkte folgender Funktionen:
- (i) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{-x^2} \cos(y)$,
 - (ii) $g: (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x, y) = \ln(x) \sin(2y)$.

AUFGABE 2. (Mannigfaltigkeiten)

Für $a \in \mathbb{R}$ betrachten wir die Menge

$$M_a = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = a\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

- (a) Zeige, dass M_a für $a \neq 0$ eine C^1 -Mannigfaltigkeit ist. Bestimme auch den Tangentialraum in jedem Punkt.
- (b) Begründe, warum M_0 keine C^1 -Mannigfaltigkeit ist.
- (c) Sei $a \neq 0$ und $f: M_a \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Nimmt f notwendigerweise sein Maximum und Minimum an?

AUFGABE 3. (Extrema auf Ellipsen)

Seien $a, b > 0$, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = 4x + 4y$ und $M = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$.

- (a) Zeige, dass M eine C^1 -Mannigfaltigkeit ist.
- (b) Beweise, dass die Funktion f auf der Menge M ihr absolutes Maximum und ihr absolutes Minimum annimmt.

- (c) Bestimme die kritischen Punkte der Funktion f auf der Menge M . Bestimme, an welchen Stellen in M das absolute Maximum angenommen wird und berechne dessen Wert.

AUFGABE 4. (Extrema auf schräger Ellipse)

Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$, sowie die Menge

$$M = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 = \tfrac{1}{2}\}.$$

- (a) Zeige, dass M eine C^1 -Mannigfaltigkeit ist.
- (b) Beweise, dass die Funktion f auf M ihr absolutes Maximum und Minimum annimmt.
- (c) Bestimme die kritischen Punkte von f auf M . Bestimme, an welchen Stellen in M das absolute Maximum und Minimum angenommen wird und bestimme deren Werte.

AUFGABE 5. (Extrema auf Kreis vs. Kreisscheibe)

Wir betrachten die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = e^{x(y+1)}$, sowie die Mengen

$$S = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\} \quad \text{und} \quad B = \{(x, y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}.$$

Wir haben schon mehrmals gesehen, dass S eine C^1 -Mannigfaltigkeit ist.

- (a) Zeige, dass f auf der Menge S sein absolutes Minimum und Maximum annimmt.
- (b) Bestimme die kritischen Punkte von f auf der Menge S sowie Stellen und Werte des absoluten Maximums und Minimums.
- (c) Was ist das absolute Maximum und Minimum von f auf B ?

AUFGABE 6. (Gleichmäßige Konvergenz)

Sei X ein metrischer Raum und $D \subseteq X$. Seien für alle $n \in \mathbb{N}$ Funktionen $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben und sei außerdem $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

- (i) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f .
- (ii) Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Erinnerung: Es ist $\|f\|_\infty = \sup_{x \in D} |f(x)|$ die Supremumsnorm.

AUFGABE 7. (Metrische Räume – revisited)

Wir betrachten (wie schon an Tag 1) den metrischen Raum (X, d_∞) mit $X = C([0, 1]^2; \mathbb{R})$ und Metrik

$$d_\infty: X \times X \rightarrow [0, \infty), \quad d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]^2} |f(x) - g(x)|.$$

Weiter sei $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ wieder die Funktionenfolge

$$f_k: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_k(x) = x_1^k x_2.$$

Wir haben an Tag 1 gesehen, dass diese Folge in (X, d_∞) nicht gegen die Nullfunktion konvergiert. Zeige, dass $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in (X, d_∞) allgemein nicht konvergiert.

Tipp: Argumentiere mit Hilfe der Eigenschaften von gleichmäßiger Konvergenz.

AUFGABE 8. (Punktweise und gleichmäßige Konvergenz)

Seien Funktionen $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ gegeben durch

$$f_n(x) = \sqrt{\frac{1}{n} + x^2} \quad \text{für } x \in [-1, 1].$$

- (a) Untersuche die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.
- (b) Untersuche die Funktionenfolge $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz.

AUFGABE 9. (Differenzierbarer Grenzwert von Funktionenfolgen)

- (a) Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die punktweise gegen eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Wir nehmen an, dass die Folge $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Ableitungen $f'_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert. Zeige, dass f dann differenzierbar ist mit

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

Tipp: Nutze, dass $f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x f'_n(t) dt$ für alle $x \in [a, b]$. Was weißt du über die Integrale einer gleichmäßig konvergierenden Funktionenfolge?

- (b) Wir definieren eine Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch

$$f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx).$$

Zeige, dass die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sogar gleichmäßig gegen eine differenzierbare Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert, die Folge $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aber nicht einmal punktweise konvergiert. (Die Schlussfolgerung in (a) gilt hier also nicht.)