



Repetitorium Analysis II

Tag 5: Komplexe Analysis

AUFGABE 1. (Gleicher Realteil $\Rightarrow$ gleicher Imaginärteil)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ eine offene Menge.

- (a) Unter welchen Bedingungen nennt man eine Funktion $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ in einem Punkt $z \in D$ komplex differenzierbar?
- (b) Seien $f, g: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit $\operatorname{Re}(f) = \operatorname{Re}(g)$ und $f(z_0) = g(z_0)$ für ein $z_0 \in D$. Zeige, dass dann $f(z) = g(z)$ für alle $z \in D$.

AUFGABE 2. (Komplexe Differenzierbarkeit)

Bestimme alle Punkte, an denen die folgenden Funktionen komplex differenzierbar sind. Berechne an den entsprechenden Punkten die Ableitung. Sind die Funktionen holomorph?

- (a) Sei $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z + 2| \neq \sqrt{2}\}$ und sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(x + iy) = \frac{x + 2}{x^2 + y^2 + 4x + 2} - i \cdot \frac{y}{x^2 + y^2 + 4x + 2}.$$

- (b) Sei $D = \mathbb{C} \setminus \{1, -1, i, -i\}$ und sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch

$$f(z) = \frac{3z^2 + 2z}{z^4 - 1}.$$

- (c) Sei $D = \mathbb{C}$ und sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = e^{\bar{z}}$.

Erinnerung: Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist $\bar{z} = x - iy$ die komplex Konjugierte.

- (d) Sei $D = \mathbb{C}$ und sei $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert durch $f(z) = z(z + \bar{z}^2)$.

AUFGABE 3. (CR-DGL vs. komplexe Differenzierbarkeit)

Wir betrachten die komplexe Funktion

$$f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad f(z) = \begin{cases} \left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2 & \text{falls } z \neq 0, \\ 1 & \text{falls } z = 0. \end{cases}$$

Zeige:

- (a) In $z_0 = 0$ ist f als Funktion $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ partiell differenzierbar und erfüllt die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen.
- (b) In $z_0 = 0$ ist f nicht komplex differenzierbar.

AUFGABE 4. (Konstante Funktionen)

Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen.

- (a) Sei $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) \in \mathbb{R}$ für alle $z \in D$. Zeige, dass f konstant ist.
- (b) Sei $g: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Es gebe ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $|g(z)| = c$ für alle $z \in D$. Zeige, dass g konstant ist.

AUFGABE 5. (Funktionen bauen)

Finde alle holomorphen Funktionen $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, so dass für alle $z = x + iy \in \mathbb{C}$ gilt, dass

$$\operatorname{Im}(f)(x, y) = 2xy + x.$$

AUFGABE 6. (Komplexe Kurvenintegrale)

- (a) Sei $D \subseteq \mathbb{C}$ offen, $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ eine Kurve der Klasse C^1 und $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ eine komplexe Funktion. Definiere das komplexe Kurvenintegral $\int_{\gamma} f(z) dz$.
- (b) Berechne die folgenden Kurvenintegrale mithilfe der Definition aus (a):
- (i) $\int_{\gamma} (z - z_0)^k dz$ für $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = z_0 + r \cdot e^{it}$, wobei $z_0 \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{Z}$ und $r > 0$ fest gewählt sind.
- (ii) $\int_{\gamma} \frac{1}{|z|} dz$ für $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$.
- (iii) $\int_{\gamma} \operatorname{Re}(z) + \operatorname{Im}(z) dz$ für
- (1) $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = t + it^2$.
- (2) $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = 2e^{it}$.

AUFGABE 7. (Cauchy)

- (a) Formuliere den Satz von Cauchy, sowie die Cauchy'sche Integralformel.
- (b) Sei $D \subset \mathbb{C}$ offen und $F: D \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so dass $F': D \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist. Sei weiter $\gamma: [a, b] \rightarrow D$ eine Kurve der Klasse C^1 . Was kann man über das Integral $\int_{\gamma} F'(z) dz$ sagen?
- (c) Berechne folgende Integrale mithilfe von (a) und (b):

- | | |
|--|--|
| (i) $\int_{ z =1} z e^{z^2} dz$ | (vi) $\int_{ z+i =1} \frac{e^z}{z^2 + 1} dz$ |
| (ii) $\int_{ z-2 =5} \frac{1}{z^2 - 6z} dz$ | (vii) $\int_{ z =\frac{3}{2}} \frac{z^2 + 1}{z(z-1)(z+2)} dz$ |
| (iii) $\int_{ z =2026} \frac{1}{(z+2)^3} dz$ | (viii) $\int_{ z =\frac{3}{2}} \frac{z^3 + 1}{z(z-1)(z+2)} dz$ |
| (iv) $\int_{ z =2026} \frac{z}{(z+2)^3} dz$
Tipp: $z = (z+2) - 2$. | (ix) $\int_{ z =2} \frac{1}{z(z-1)^2} dz$ |
| (v) $\int_{ z =2026} \frac{z^3}{(z+2)^3} dz$ | (x) Bonus: $\int_{ z =10} \frac{e^{-z}}{(z+2)^3} dz$ |

(d) Bestimme alle Werte, die das Integral

$$I(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{1}{1+z^2} dz$$

für geschlossene Wege $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ annehmen kann.