



Repetitorium Analysis II

Lösung Tag 1: Topologische, metrische und Banachräume

AUFGABE 1. (Metriken)

(a) Definiere den Begriff eines *metrischen Raumes*.

(b) Sei $d_1: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ eine Metrik auf $\mathbb{R}$. Bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, so dass

$$d_2: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad d_2(x, y) = (a - 1)(a - 2026) \cdot d_1(x, y)$$

eine Metrik auf $\mathbb{R}$ ist.

(c) Sei $X = [1, \infty)$ und definiere

$$d: X \times X \rightarrow [0, \infty), \quad d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|.$$

Zeige, dass (X, d) ein metrischer Raum ist.

(d) Betrachte die Abbildung

$$d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty), \quad d(x, y) = \left| \frac{x}{1 + |x|} - \frac{y}{1 + |y|} \right|.$$

Zeige oder widerlege: Das Paar $(\mathbb{R}, d)$ ist ein metrischer Raum.

(e) Sei (X, d) ein metrischer Raum und $a \in X$ fest. Zeige, dass die Abbildung

$$f: X \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto d(x, a)$$

gleichmäßig stetig ist. Wann ist diese Abbildung konstant?

Lösung. Zu (a): siehe Skript.

Zu (b): Falls $a \in \{1, 2026\}$, ist d_2 die Nullfunktion auf $\mathbb{R}$ und damit keine Metrik. Falls $a \in (1, 2026)$, ist $d_2 \leq 0$ und damit ebenfalls keine Metrik. Falls $a \in (-\infty, 1) \cup (2026, \infty)$, ist $d_2 = \alpha d_1$ mit $\alpha > 0$. Die Eigenschaft, eine Metrik zu sein, überträgt sich dann direkt von d_1 auf d_2 .

Zu (c): Da $X = [1, \infty)$, ist d wohldefiniert. Nach Definition des Betrags nimmt d nur nicht-negative Werte an. Für alle $x, y \in X$ gilt zudem

$$d(x, y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{y} \quad \Longleftrightarrow \quad x = y,$$

also Definitheit. Die Symmetrie von d ist trivial. Mit der Dreiecksungleichung für den Betrag (Δ) folgt weiter für alle $x, y, z \in X$, dass

$$d(x, z) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{z} \right| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} + \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right| \stackrel{(\Delta)}{\leq} \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right| + \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{z} \right| = d(x, y) + d(y, z).$$

Also ist die Dreiecksungleichung auch für d erfüllt. Damit ist d eine Metrik auf X .

Zu (d): Ja, $(\mathbb{R}, d)$ ist ein metrischer Raum. Man argumentiert dafür ganz analog zu Teil (c). Für die Definitheit kann man nutzen, dass $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x}{1+|x|}$ streng monoton wächst, also injektiv ist. Wenn also $d(x, y) = 0$ für $x, y \in \mathbb{R}$, dann folgt $x = y$.

Zu (e): Sei $\varepsilon > 0$. Da d die Dreiecksungleichung erfüllt, gilt für alle $x, y \in X$, dass

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a) \quad \text{und} \quad d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a).$$

Mit der Symmetrie $d(y, x) = d(x, y)$ folgt daraus

$$|f(x) - f(y)| = |d(x, a) - d(y, a)| \leq d(x, y).$$

Wählt man also $\delta = \varepsilon$, dann gilt für alle $x, y \in X$ mit $d(x, y) < \delta$, dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Also ist f gleichmäßig stetig. Falls f konstant ist, muss es die Nullfunktion sein (da $d(a, a) = 0$) und es muss $X = \{a\}$ sein. (Ansonsten wäre die Definitheit verletzt.)

AUFGABE 2. (Topologische Eigenschaften)

- (a) Seien X und Y metrische Räume und $f, g: X \rightarrow Y$ stetige Funktionen. Zeige, dass die Menge

$$A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \subseteq X$$

abgeschlossen in X ist.

- (b) Betrachte die Menge

$$B = (0, 1] \times ([0, 1] \setminus \mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{R}^2.$$

- (i) Bestimme die Mengen ∂B , $\overline{B}$, $\overline{B} \setminus B$ und B° .
 - (ii) Entscheide begründet, welche der Mengen aus (i) kompakt sind.
- (c) Sei $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Entscheide für die folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch sind. Gib jeweils eine kurze Begründung bzw. ein Gegenbeispiel.
- (i) Wenn f stetig auf einer kompakten Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ist, so nimmt $f|_K$ sein Maximum an.
 - (ii) Wenn f stetig auf einer abgeschlossenen Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist, so nimmt $f|_A$ sein Maximum an.
 - (iii) Wenn f stetig auf einer beschränkten Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ist, so nimmt $f|_B$ sein Maximum an.
 - (iv) Es gibt eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$, die offen ist.
 - (v) Ist f stetig und beschränkt, so nimmt f sein Minimum an.
 - (vi) Ist f stetig, so sind Urbilder kompakter Mengen kompakt.
 - (vii) Ist f stetig, so sind Bilder kompakter Mengen kompakt.
 - (viii) Es gibt eine stetige, surjektive Abbildung $g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$.
 - (ix) Es gibt eine stetige, surjektive Abbildung $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.
 - (x) Jede abgeschlossene und beschränkte Teilmenge $K \subseteq X$ eines metrischen Raumes X ist kompakt.
 - (xi) Für jede stetige Funktion $g: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: Für jedes $x_2 \in \mathbb{R}$ nimmt die Funktion $h: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto g(t, x_2)$ ihr Maximum an.
 - (xii) Für jede stetige Funktion $g: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gilt: Für jedes $x_1 \in [0, 1]$ nimmt die Funktion $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto g(x_1, t)$ ihr Maximum an.
 - (xiii) In einem metrischen Raum ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge.
 - (xiv) Jede abgeschlossene Teilmenge $M \subseteq X$ eines metrischen Raumes X ist vollständig.

Lösung. Zu (a): Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in A mit Grenzwert $x \in X$. Definiere die Folge $a_n = f(x_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $a_n = f(x_n) = g(x_n)$ und da f und g stetig sind, gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(x)$$

und analog $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g(x)$. In metrischen Räumen hat jede Folge höchstens einen Grenzwert, also folgt $f(x) = g(x)$ und damit $x \in A$. Also ist A abgeschlossen.

Zu (b): Wir nutzen, dass $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ dicht ist. Man erhält die folgenden Mengen:

- $\partial B = [0, 1] \times [0, 1]$ ist abgeschlossen und beschränkt und daher nach Heine-Borel kompakt.
- $\overline{B} = B \cup \partial B = [0, 1] \times [0, 1]$ ist kompakt (s.o.).
- $\overline{B} \setminus B = (\{0\} \times [0, 1]) \cup ((0, 1] \times ([0, 1] \cap \mathbb{Q}))$ ist nicht kompakt. Um das zu sehen, genügt es nach Heine-Borel zu zeigen, dass diese Menge nicht abgeschlossen ist. Sei $(q_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq [0, 1] \cap \mathbb{Q}$ eine Folge mit $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Betrachte dann die Folge $(1, q_n) \in \overline{B} \setminus B$ für $n \in \mathbb{N}$. Der Grenzwert erfüllt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1, q_n) = \left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \notin \overline{B} \setminus B,$$

weshalb $\overline{B} \setminus B$ tatsächlich nicht abgeschlossen ist.

- $B^\circ = B \setminus \partial B = \emptyset$ ist trivialerweise kompakt.

Zu (c):

- Wahr. Das ist ein klassisches Resultat.
- Falsch. Betrachte $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ und $A = \mathbb{R}$.
- Falsch. Betrachte $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x$ und $B = (0, 1)$.
- Wahr. Nach Heine-Borel hat nur $\emptyset$ diese Eigenschaft.
- Falsch. Betrachte $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.
- Falsch. Betrachte $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 0$. Dann ist $f^{-1}(\{0\}) = \mathbb{R}$ nicht kompakt.
- Wahr. Das ist ein klassisches Resultat.
- Wahr. Wir wissen, dass $g_0: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan(x)$ eine stetige Surjektion (sogar Bijektion!) ist. Bauen wir den Definitionsbereich um, bekommen wir die stetige Surjektion $g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \tan(\pi(x - \frac{1}{2}))$.
- Falsch. Gäbe es so eine Funktion, müsste $g([0, 1]) = \mathbb{R}$ nach (vii) kompakt sein. Das ist es aber nicht.
- Falsch. Betrachte $X = (0, 1)$ mit der klassischen Topologie (die durch die euklidische Norm bzw. die euklidische Metrik induziert wird). Dann ist $K = X$ abgeschlossen und beschränkt, aber nicht kompakt.
- Wahr. Siehe (i).
- Falsch. Definiere $g: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto x_2$. Dann ist $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto t$.
- Wahr. Das folgt aus der Dreiecksungleichung für die Metrik.
- Falsch. Betrachte $X = \mathbb{Q}$ mit der klassischen euklidischen Metrik. Dann ist $M = \mathbb{Q}$ abgeschlossen, aber nicht vollständig.

AUFGABE 3. (Metriken und Konvergenz)

Auf $X = C([0, 1]^2; \mathbb{R})$ betrachten wir die zwei Abbildungen $d_{L^2}, d_\infty: X \times X \rightarrow [0, \infty)$ definiert durch

$$d_{L^2}(f, g) = \left(\int_0^1 \int_0^1 |f(x_1, x_2) - g(x_1, x_2)|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}},$$
$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, 1]^2} |f(x) - g(x)|.$$

Es darf ohne Beweis angenommen werden, dass d_{L^2} eine Metrik auf X ist.

- (a) Zeige, dass d_∞ eine Metrik auf X ist.
- (b) Wir betrachten die Folge $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in X gegeben durch

$$f_k: [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_k(x_1, x_2) = x_1^k x_2$$

sowie die Nullfunktion $f = 0 \in X$. Untersuche, ob $f_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ im metrischen Raum (X, d_{L^2}) bzw. (X, d_∞) .

Hinweis: Diese Aufgabe wird an Tag 3 fortgesetzt.

Lösung. Zu (a): Das prüft man völlig geradeaus nach.

Zu (b): Es ist

$$d_{L^2}(f_k, f) = \left(\int_0^1 \int_0^1 |x_1^k x_2|^2 dx_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{3(2k+1)} \right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6k+3}}.$$

Also konvergiert $d_{L^2}(f_k, f) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, d.h. $f_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f$ in (X, d_{L^2}) . Andererseits ist

$$d_\infty(f_k, f) = \sup_{x \in [0, 1]^2} |f_k(x)| = \sup_{x \in [0, 1]^2} |x_1^k x_2| = 1$$

für alle $k \in \mathbb{N}$. Also konvergiert $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in (X, d_∞) nicht gegen f .

AUFGABE 4. (Induzierte Metrik)

- (a) Definiere den Begriff eines *normierten Vektorraumes*.
- (b) Sei E ein Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|$. Zeige, dass die induzierte Abbildung

$$d: E \times E \rightarrow [0, \infty), \quad d(x, y) = \|x - y\|$$

eine Metrik auf E definiert.

- (c) Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die *Metrik der französischen Eisenbahn* auf $\mathbb{R}^n$, also

$$\tilde{d}: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty), \quad \tilde{d}(x, y) = \begin{cases} \|x - y\|_2 & \text{wenn } x = \alpha y \text{ für ein } \alpha > 0, \\ \|x\|_2 + \|y\|_2 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei ist $\|\cdot\|_2$ die klassische euklidische Metrik. Es darf ohne Beweis angenommen werden, dass $(\mathbb{R}^n, \tilde{d})$ ein metrischer Raum ist.

Gibt es eine Norm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$, die $\tilde{d}$ wie in (b) induziert?

Lösung. Zu (a): siehe Skript.

Zu (b): Definitheit folgt sofort aus der Definitheit der Norm. Für $x, y \in E$ gilt nach Homogenität der Norm, dass

$$d(x, y) = \|x - y\| = \|(-1) \cdot (y - x)\| = |-1| \cdot \|y - x\| = \|y - x\| = d(y, x),$$

also ist d symmetrisch. Für $x, y, z \in E$ erhalten wir mit der Dreiecksungleichung der Norm, dass

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|x - y + y - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z),$$

weshalb die Dreiecksungleichung auch für d gilt.

Zu (c): Falls $n = 1$, ist $\tilde{d}(x, y) = \|x - y\|_2 = |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Also ist $\tilde{d}$ in diesem Fall durch den Betrag induziert.

Falls $n \geq 2$, ist $\tilde{d}$ nicht durch eine Norm induziert. Angenommen es gäbe so eine Norm $\|\cdot\|$. Dann erhalten wir für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$, dass

$$\tilde{d}(x + y, y) = \|x + y - y\| = \|x - 0\| = \tilde{d}(x, 0) = \|x\|_2.$$

Betrachte etwa $x = (1, 0, \dots, 0)^\top$, $y = (0, 1, 0, \dots, 0)^\top \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

$$\tilde{d}(x + y, y) = \tilde{d}((1, 1, 0, \dots, 0)^\top, y) = \|(1, 1, 0, \dots, 0)^\top\|_2 + \|y\|_2 = \sqrt{2} + 1,$$

aber $\|x\|_2 = 1$, Widerspruch.

AUFGABE 5. (Folgenkompaktheit)

Seien $(X, d_X), (Y, d_Y)$ metrische Räume, $K \subseteq X$ eine Teilmenge und $f: X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

- (a) Wann nennt man f in $x_0 \in X$ stetig?
- (b) Wann nennt man K folgenkompakt? Wann nennt man K kompakt?
- (c) Ist es möglich, dass K kompakt, aber nicht folgenkompakt ist? Gib ein Beispiel bzw. ein Argument, warum kein solches Beispiel existiert.
- (d) Beweise mit Hilfe der Definition von Folgenkompaktheit: Falls K folgenkompakt und f stetig ist, so ist $f(K) \subseteq Y$ folgenkompakt.
- (e) Zu welchem aus der Vorlesung bekannten Satz ist die Aussage in (d) äquivalent?

Lösung. Zu (a) und (b): siehe Skript.

Zu (c): Nein, denn nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß gilt: Die Teilmenge K ist genau dann kompakt, wenn sie folgenkompakt ist. (*Hinweis:* Das ist eine Eigenschaft, für die wir die Metrik benötigen. In allgemeinen topologischen Räumen gibt es Mengen, die kompakt, aber nicht folgenkompakt sind; und Mengen, die folgenkompakt, aber nicht kompakt sind!)

Zu (d): Sei $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $f(K)$. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in K mit $f(x_n) = y_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da K folgenkompakt ist, existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ und $x \in K$ mit $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x$. Da f stetig ist, folgt $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x)$. Also gilt

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(x) \in f(K).$$

Die Folge $(y_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ist also eine (in $f(K)$) konvergente Teilfolge von $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Damit ist $f(K)$ folgenkompakt.

Zu (e): Da die Begriffe Kompaktheit und Folgenkompaktheit in metrischen Räumen äquivalent sind, ist die Aussage in (d) äquivalent zu: Stetige Bilder kompakter Mengen sind kompakt.

AUFGABE 6. (Operatornorm)

Seien $(A, \|\cdot\|_A)$, $(B, \|\cdot\|_B)$ Banachräume und $f: A \rightarrow B$ eine lineare Abbildung.

- (a) Definiere die Operatornorm auf $L(A, B)$.
- (b) Sei f zusätzlich eine beschränkte Funktion. Zeige, dass f eine stetige Funktion ist.
- (c) Betrachte die Abbildung

$$\mathcal{I}: (C([-1, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|) \quad \text{mit} \quad \mathcal{I}(g) = \int_{-1}^1 g(x) \, dx.$$

Zeige, dass die Operatornorm von $\mathcal{I}$ gleich 2 ist.

- (d) Für welche $a \in \mathbb{R}$ existiert eine lineare Abbildung

$$\mathcal{J}_a: (C([-1, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|)$$

deren Operatornorm a ist? Gib gegebenenfalls jeweils ein Beispiel an.

Lösung. Zu (a) und (b): siehe Skript.

Zu (c): Wir schätzen die Operatornorm nach oben und unten ab. Für $g \in C([-1, 1]; \mathbb{R})$ haben wir die Abschätzung

$$|\mathcal{I}(g)| \leq \int_{-1}^1 |g(x)| \, dx \leq (1 - (-1))\|g\|_\infty = 2\|g\|_\infty.$$

Damit folgt

$$\|\mathcal{I}\|_{L(C([-1, 1]; \mathbb{R}), \mathbb{R})} = \sup_{g \in C([-1, 1]; \mathbb{R}), g \neq 0} \frac{|\mathcal{I}(g)|}{\|g\|_\infty} \leq \sup_{g \in C([-1, 1]; \mathbb{R}), g \neq 0} \frac{2\|g\|_\infty}{\|g\|_\infty} = 2.$$

Für die andere Ungleichung betrachten wir die stetige konstante Funktion $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = 1$ für alle $x \in [-1, 1]$. Dann ist

$$\|g\|_\infty = \sup_{x \in [-1, 1]} |g(x)| = 1 \quad \text{und} \quad |\mathcal{I}(g)| = 2.$$

Das impliziert $\|\mathcal{I}\|_{L(C([-1, 1]; \mathbb{R}), \mathbb{R})} \geq \frac{2}{1} = 2$.

Zu (d): Normen können keine negativen Werte annehmen, also existiert für $a < 0$ keine solche lineare Abbildung. Sei jetzt also $a \geq 0$. Etwa die lineare Abbildung

$$\mathcal{J}_a: (C([-1, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \rightarrow (\mathbb{R}, |\cdot|) \quad \text{mit} \quad \mathcal{J}_a(g) = \frac{a}{2} \int_{-1}^1 g(x) \, dx$$

tut's. Das folgt aus (c) mit der Homogenität der Operatornorm.

AUFGABE 7. (Banachräume)

Auf dem Vektorraum $C^1([a, b]; \mathbb{R})$ der stetig differenzierbaren Funktionen $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir die Abbildung

$$\|\cdot\|_{C^1}: C^1([a, b]; \mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty), \quad \|f\|_{C^1} = \sup_{x \in [a, b]} (|f(x)| + |f'(x)|).$$

(a) Zeige, dass $\|\cdot\|_{C^1}$ eine Norm auf $C^1([a, b]; \mathbb{R})$ definiert.

(b) Zeige, dass $(C^1([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^1})$ ein Banachraum ist.

Tipps: Nutze aus, dass $(C([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum ist. Außerdem darfst du die folgenden zwei Aussagen, die wir an Tag 3 zeigen werden, vorerst ohne Beweis verwenden:

Fakt 1. Sei X ein metrischer Raum und $D \subseteq X$. Seien für alle $n \in \mathbb{N}$ Funktionen $f_n: D \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben und sei außerdem $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann sind äquivalent:

- (i) Die Funktionenfolge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert gleichmäßig gegen f .
- (ii) Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.

Fakt 2. Sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge stetig differenzierbarer Funktionen $f_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, die punktweise gegen eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ konvergiert. Wir nehmen an, dass die Folge $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Ableitungen $f'_n: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gleichmäßig konvergiert. Dann ist f differenzierbar mit

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x) \quad \text{für alle } x \in [a, b].$$

(c) Zeige: Die Abbildung

$$\mathcal{D}: (C^1([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^1}) \longrightarrow (C([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty), \quad f \longmapsto f',$$

die jeder Funktion ihre Ableitung zuordnet, ist stetig.

Lösung. Zu (a): Das zeigt man völlig analog zu dem Beweis für die übliche Supremums-Norm $\|\cdot\|_\infty$. Für die Homogenität nutzt man $(af)' = af'$ für $a \in \mathbb{R}$ und $f \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$. Für die Dreiecksungleichung braucht man $(f+g)' = f' + g'$ für $f, g \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$.

Zu (b): Wir müssen zeigen, dass $C^1([a, b]; \mathbb{R})$ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_{C^1}$ vollständig ist. Zuerst bemerken wir, dass für alle $f \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ gilt, dass

$$\|f\|_\infty \leq \|f\|_{C^1} \quad \text{und} \quad \|f'\|_\infty \leq \|f\|_{C^1}.$$

Sei jetzt $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $C^1([a, b]; \mathbb{R})$ bezüglich $\|\cdot\|_{C^1}$. Dann folgt aus unserer Bemerkung oben, dass $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolgen in $C([a, b]; \mathbb{R})$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ sind. Der Vektorraum $C([a, b]; \mathbb{R})$ ist vollständig, also konvergiert die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ gegen eine Funktion $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$ und die Folge $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen eine Funktion $g \in C([a, b]; \mathbb{R})$. Nach Fakt 1 sind beide Konvergenzen gleichmäßige Konvergenzen. Mit Fakt 2 folgt dann, dass f differenzierbar ist und $g = f'$. Also ist $f \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$. Außerdem gilt die Abschätzung

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_{C^1} &= \sup_{x \in [a, b]} (|f_n(x) - f(x)| + |f'_n(x) - f'(x)|) \\ &\leq \sup_{x \in [a, b]} |f_n(x) - f(x)| + \sup_{x \in [a, b]} |f'_n(x) - f'(x)| \\ &= \|f_n - f\|_\infty + \|f'_n - f'\|_\infty, \end{aligned}$$

und damit $f_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f$ bezüglich $\|\cdot\|_{C^1}$. Also ist $(C^1([a, b]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_{C^1})$ ein Banachraum.

Zu (c): Offensichtlich ist $\mathcal{D}$ gemäß der Ableitungsregeln linear. Für $f \in C^1([a, b]; \mathbb{R})$ sehen wir

$$\|\mathcal{D}(f)\|_\infty = \|f'\|_\infty \leq \|f\|_{C^1}.$$

Damit lässt sich die Operatornorm von $\mathcal{D}$ abschätzen durch

$$\|\mathcal{D}\|_{L(C^1([a,b];\mathbb{R}), C([a,b];\mathbb{R}))} = \sup_{f \in C^1([a,b];\mathbb{R}), f \neq 0} \frac{\|\mathcal{D}(f)\|_\infty}{\|f\|_{C^1}} \leq \sup_{f \in C^1([a,b];\mathbb{R}), f \neq 0} \frac{\|f\|_{C^1}}{\|f\|_{C^1}} = 1.$$

Nach Vorlesung sind beschränkte lineare Abbildungen zwischen Banachräumen stetig.

Hinweis: Würde man statt mit $\|\cdot\|_{C^1}$ mit der klassischen Supremums-Norm $\|\cdot\|_\infty$ arbeiten, so wäre der entsprechende Raum weder vollständig, noch wäre $\mathcal{D}$ beschränkt.